目　　录

1. 什么是函数方程?

我们还是先从方程谈起. 对于方程,大家已经是相当熟悉的了. 开始学习中学数学不久,同学们首先就遇到了最简单的方程——一元一次方程. 接着相继学习了二次方程、分式方程、无理方程. 一直到最后,又研究了更为复杂的高次方程、指数方程、对数方程、三角方程等等. 由于方程在实践和理论上的重要性,这部分内容就成了中学数学主要组成部分之一.

让我们来回忆一下有关的一些概念:

什么是方程?在中学数学里,我们把方程定义为含有未知数的等式. 等式

$$2x^2+6x-8=x-5 \tag{1}$$

就是一个关于未知数 x 的方程.

如果任意给予未知数一个值,一般说来,方程两边的表达式的值可能是不相等的. 例如,在方程(1)中,取 $x=-1$,容易计算,方程左边的值是 -12,而右边的值为 -6,两者就不相等. 但对于未知数的某个(或某些)"特殊"值,方程两边的表达式的值却可能恰好相等. 不难验证,如果 $x=-3$ 或 $x=\frac{1}{2}$,方程(1)两边的值相等,都等于 -8 或 $-4\frac{1}{2}$. 这种能使方程两边的表达式的值相等的未知数的值叫做方程的解. $x=-3$,$x=\frac{1}{2}$ 就是方程(1)的两个解. 当然,并不是所有方程都有解. 例如,方程

$$x^2=-5$$

在实数范围内就没有解.

如果方程无解，证明它无解；如果方程有解，把这些解找出来，这件工作叫*解方程*.

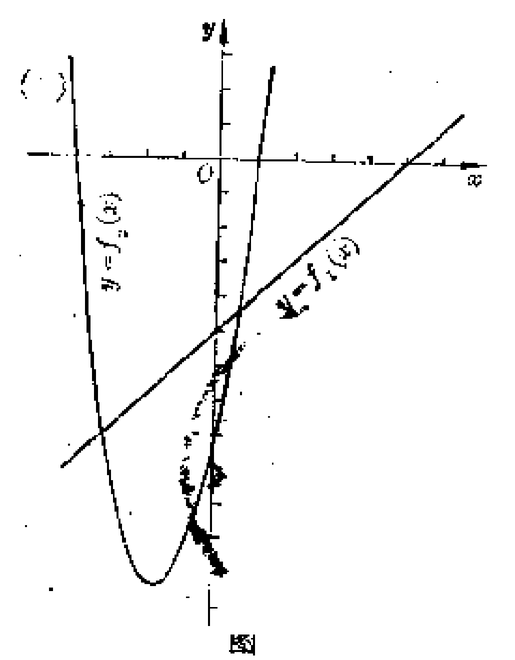
以上这些，还可以换个说法. 从函数的角度看，一个(一元)方程的两边的未知数的表达式，分别可以看作是同一个自变量的两个函数. 例如，方程(1)的右边是一个一次函数：

$$f_1(x)=x-5;$$

左边是一个二次函数：

$$f_2(x)=2x^2+6x-8.$$

显然，对于某一个特定的方程，方程两边的函数是确定的. 因而，我们可以把方程看作是含有*确定的*函数的等式. 所谓方程的解，就是使两边函数的值相等的自变量的值. 解方程的问题，就是要寻求自变量的这样的值，它能使这两个函数的值相等；或者证明自变量的这样的值并不存在.



图

大家熟知的方程的图象解法，就是建立在这种观点之上的. 以上述方程(1)为例，我们在同一坐标系里，分别作出函数 $f_2(x)=2x^2+6x-8$ 和 $f_1(x)=x-5$ 的图象(图1). 抛物线 $y=f_2(x)$ 与直线 $y=f_1(x)$ 的交点坐标是 $P_1(-3,\ -8)$ 和 $P_2\left(\frac{1}{2},\ -4\frac{1}{2}\right)$. 这表明，当 $x=-3$ 或 $x=$

$\frac{1}{2}$时，函数 $2x^2+6x-8$ 和 $x-5$ 有相等的值$\left(\text{分别是}-8\text{和}-4\frac{1}{2}\right)$. 方程(1)的解自然就是 $x_1=-3$ 和 $x_2=\frac{1}{2}$了.

方程的两边除了可以是确定的函数外，还可能是不确定的、未知的函数. 这种方程对于大家来说其实并不十分陌生. 回想一下我们是如何定义偶函数、奇函数、周期函数的: 对于自变量 x 的任何值，满足下述关系的函数

$$f(-x)=f(x), \tag{2}$$

$$f(-x)=-f(x), \tag{3}$$

$$f(x+a)=f(x), \quad (a\text{ 是不为零的常数}) \tag{4}$$

分别叫做偶函数、奇函数和周期函数. 但在这里，自变量 x 应当是取任意的值(当然要在函数的定义域内)都能使方程成立(即能使两个函数的值相等)，而不是象在普通方程中那样，只是对于自变量的某个(或某些)特殊的值才能使方程成立. 在这里，未知的不是函数的自变量(因为它可以取定义域中的任意值)，未知的是函数本身. 这种含有未知函数的等式，叫**函数方程**. 方程(2)，(3)，(4)都是函数方程.

函数方程的解的含义也与普通方程不同. 如前所述，普通方程的解，是能使方程两边的函数(这些函数是确定的)值相等的自变量的值，从而它的解是一个或若干个数. 而**函数方程的解**，是指能使方程成立的函数，从而它的解是一个或若干个函数. 例如函数

$$f(x)=x^2,$$

代入方程(2)的左边，得

$$f(-x)=(-x)^2=x^2,$$

右边也是

$$f(x)=x^2.$$

所以不论对于自变量的任何值，始终有

$$(-x)^2=x^2.$$

可见函数 $f(x)=x^2$ 是方程(2)的一个解．不难验证，函数

$f(x)=x^{2n}$，(n 是正整数)

$f(x)=|x|$，$f(x)=\cos x$，

$f(x)=|\sin x|$，$f(x)=K$，(K 是常数)

$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$，(r 是非零常数)

$f(x)=\phi(x^2)$，[$\phi(x)$是任意函数]

等等，都是函数方程(2)的解．

类似地，也可以举出函数方程(3)的一些解来．例如，

$f(x)=Kx$，(K 是常数)

$f(x)=x^{2n+1}$，(n 是正整数)

$f(x)=\dfrac{K}{x}$，(K 是常数)

$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$f(x)=\sin x$，$f(x)=\operatorname{tg} x$，

等等都是．

函数方程(4)也有许多解．例如当 $a=2\pi$ 时，有 $f(x)=\sin x$ 和 $f(x)=\cos x$；当 $a=\pi$ 时，有 $f(x)=\operatorname{tg} x$ 和 $f(x)=\operatorname{ctg} x$；当 a 为任何正数时，有 $f(x)=K$(K 是常数)．

寻求函数方程的解，或者证明函数方程无解，就叫**解函数方程**．由于函数方程的复杂性和多样性，一般地说，解函数方程要比解普通方程困难得多．

我们在前边曾列举了三个函数方程．这些函数方程描述了某类函数的特殊性质(奇偶性，周期性)，因而具有很大的理论意义．但是，这并不是说，只有在函数理论的研究中才会出现函数方程．正如普通方程一样，很多实际问题都会导致函

数方程的建立．我们通过实例来说明这一点．

［例 1］ 有一个很古老、很有趣的养兔问题是这样的：假定开始时有一对大兔，一月后生了一对小兔，而这对小兔经过一个月就长成大兔．此后，每对大兔每月生一对小兔，而每对小兔经过一个月又长成大兔．问第 n 个月，共有多少对大兔？

设第 n 个月共有 $f(n)$ 对大兔．我们来计算一下前几个月大兔的对数．为了便于看清楚繁殖关系，在图 2 中，我们用“●”表示大兔，用“○”表示小兔．用“＝”号表示原来的大兔，用虚箭头表示繁殖，用实箭头表示长大．从图 2 可以看出：

图 2

$$f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=2,$$
$$f(4)=3,\ f(5)=5,\ f(6)=8,\ \cdots.$$

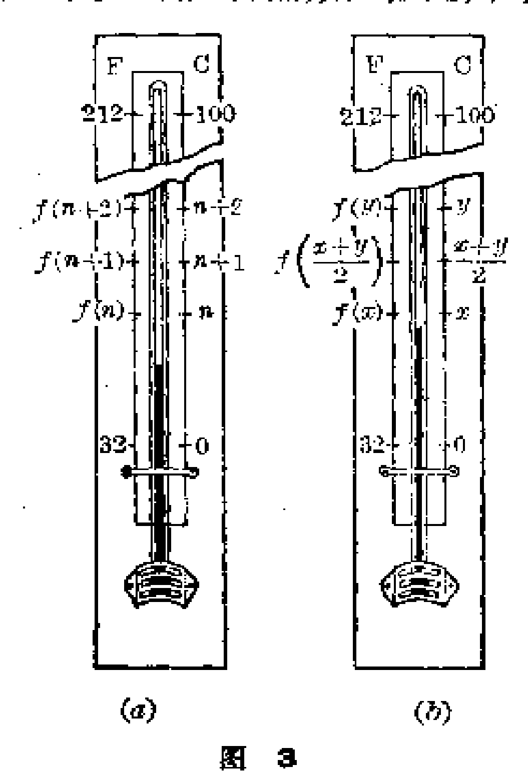
我们来分析一下从第 3 个月起以后各月份大兔对数的组成．例如，第 6 个月的大兔对数是怎样组成的呢？显然，可以分为两类：一类是第 5 个月的大兔对数（图 2 中的 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$），一类是第 5 个月小兔长大以后的对数（图 2 中的 $X,\ Y,\ Z$），而第 5 个月的小兔又恰是第 4 个月的大兔所生的，因而二者的对数相同．这样一来，可见第 6 个月大兔的对数等于第 4，5 两个月大兔对数的和．对于一般情形，显然有

$$f(n+2)=f(n+1)+f(n), \tag{5}$$

而

$$f(1)=1,\ f(2)=1. \tag{6}$$

在上例中，函数方程所涉及的函数是自然数的函数，即函数的定义域是自然数．但是，在实际问题中，有些函数方程中所涉及的函数要更一般些，即它们是实变数的实函数，也就是说，定义域和值域都是某区间的实数．



(a) (b)

图 3

［例 2］ 度量气温常用摄氏(C)和华氏(F)温度计．我们知道，水的冰点是0°C或32°F，沸点是100°C或212°F．试求由摄氏温度换算为华氏温度的公式．

这里，华氏度数是摄氏度数的函数．设摄氏温度为 n，对应的华氏温度为 $f(n)$．于是，当摄氏温度为 $n+1$，$n+2$ 时，对应的华氏温度分别是 $f(n+1)$，$f(n+2)$［图 3(a)］．由于摄氏、华氏温度计的刻度都是均等的，很明显，有下列函数方程：

$$f(n+1)-f(n)=f(n+2)-f(n+1).$$

化简后即得

$$2f(n+1)=f(n)+f(n+2), \tag{7}$$

而

$$f(0)=32,\ f(100)=212. \tag{8}$$

更一般些，当摄氏温度为 x，y，$\frac{x+y}{2}$ 时，对应的华氏温度分别为 $f(x)$，$f(y)$，$f\left(\frac{x+y}{2}\right)$［图 3(b)］．于是，就得到相当于

(7)的函数方程:

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y). \tag{9}$$

当然,同样还有条件

$$f(0)=32,\ f(100)=212. \tag{10}$$

解出函数方程(7)或(9), 也就找到了这两种温度制间的换算公式.

[例3] 大家知道,远在欧几里德[①]时代,几何学就开始初步使用公理化方法了. 这种方法是把为数不多的、最基本、最简单的几何事实作为公理. 公理是毋需证明的命题.但要确认其他几何命题的成立, 就必须从选定的公理出发逻辑地推导出来.

公理化方法后来也为别的一些学科所使用. 静力学(研究力平衡的学科)就是这样的. 它选定这样一个事实作为其公理之一: 设有作用于一点 O 的两个大小相等的力 OP_1、OP_2: $|OP_1|=|OP_2|=p$, 夹角为 $2x$. 这两个力就产生一个合力 OR; 合力 OR 的方向是分力夹角的平分线(图 4). 当分力 OP 的大小一定时, 合力 OR 的大小是角 x 的函数 $f(x)$. 静力学的公理说:

$$|OR|=2f(x)\cdot|OP|. \tag{11}$$

图 4

乍看起来, 这一公理的提出似乎带有很大的主观人为性质. 其实以后我们将会看到,这个公理是符合实验结果的. 归根结底,公理要受实践的检验.

现在,我们来分析一下这里的函数 $f(x)$ 究竟有什么性质,满足什么方程.

---

① 欧几里德(公元前4~5世纪),希腊数学家.

设有四个力 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 同作用于 O 点(图 5),

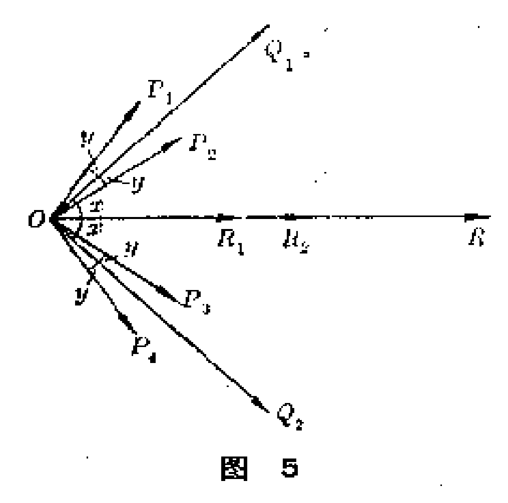


图 5

其大小相等:

$$|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|=|OP_4|=p;$$

设夹角 $\angle P_1OP_2=\angle P_3OP_4=2y$, $\angle P_2OP_3=2(x-y)$.

我们从两种不同的途径来讨论这四个力的合力.

一种途径是:将力 OP_1 和 OP_2, OP_3 和 OP_4 分别相加,相应地得到合力 OQ_1 和 OQ_2. 这两个合力分别是 $\angle P_1OP_2$ 和 $\angle P_3OP_4$ 的平分线;而根据静力学公理,即公式(11),它们的大小为

$$|OQ_1|=|OQ_2|=2pf(y).$$

再将力 OQ_1 和 OQ_2 相加,就得到合力 OR. 显然,这个合力的方向是 $\angle P_2OP_3$ 的平分线,其大小为

$$|OR|=2|OQ_1|f(x)=2\cdot 2pf(y)f(x)=4pf(x)f(y). \qquad (12)$$

另一办法是:先将分力 OP_1 和 OP_4 相加,得合力 OR_1,其方向与 OR 重合,而大小为

$$|OR_1|=2pf(x+y). \qquad (13)$$

再将 OP_2 和 OP_3 相加,又得合力 OR_2,而 OR_2 也和 OR 重合,大小为

$$|OR_2|=2pf(x-y). \qquad (14)$$

因为 OR_1, OR_2, OR 在同一条直线上,方向相同,所以有

$$|OR|=|OR_1|+|OR_2|.$$

把(12),(13),(14)分别代入上式,并约去 $2p$,就得函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y). \qquad (15)$$

[例 4] 在化学元素里，有一类叫放射性元素. 这些放射性元素由于不断地发出放射性辐射而自行衰变. 衰变后就形成其他元素. 实验证明，任何放射性物质在相等的时间内衰变(缩减)同样的倍数. 例如，放射性元素镭每经过 1600 年，由于衰变而使其质量消失为原来的一半(物理学上称为半衰期). 这样，假设有 1 克某种放射性物质，经过 x 年缩减到 $f(x)$ 克，再经过 y 年就缩减到 $f(x)f(y)$ 克. 而 1 克这种物质在 $x+y$ 年内应缩减到 $f(x+y)$ 克. 于是就得函数方程

$$f(x)f(y)=f(x+y). \qquad (16)$$

求出函数 $f(x)$，就得到了放射性物质衰变的规律.

关于函数方程的实例，我们就举到这里. 事实上，在许多理论与实际问题的研究中，函数方程被广泛地应用. 限于篇幅，也因为许多问题要牵涉到一些专门知识，我们不可能在这里多作介绍了.

以下，我们转入一些函数方程解法的讨论.

2. 函数方程的代换解法

虽然函数方程早在200多年前就已经被人们提出并加以研究了。但至今还没有关于函数方程的统一理论和解函数方程的一般方法，也没有关于函数方程的解的存在性和唯一性的判别准则。不仅如此，甚至还有一些函数方程至今未能解出。而且函数方程现有的一些解法，往往要借助于高等数学的工具(例如把函数方程化为微分方程，或者化为有限差分方程等等)。这当然远远超出这本小册子的范围。但是，对于某些特殊的、简单的函数方程，应用初等方法也是能够解出的。其中有一种方法叫代换法。我们就来介绍这种方法。

[例5] 解函数方程

$$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax.\quad (a^2\neq 1) \tag{17}$$

解 因原式中 $x\neq 0$，把自变量 x 换为 $\frac{1}{x}$，于是 $\frac{1}{x}$ 就换为 x。函数方程(17)化为

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{a}{x}. \tag{18}$$

(17)乘以 a，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+a^2f(x)=a^2x. \tag{19}$$

(18)－(19)，得

$$(1-a^2)f(x)=\frac{a}{x}-a^2x.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{a(1-ax^2)}{x(1-a^2)}.$$

从上例可以看出，代换法的基本思想是这样的：将函数中的自变量 x 适当地代换以别的自变量（在代换时应注意力求使函数的定义域不发生变化），得到一个新的函数方程．把新得到的这个函数方程与原有的函数方程联立，组成一个关于未知函数的代数方程组．再应用通常的消元法，解这个方程组，就求得了原函数方程的解．至于原来函数中的自变量 x 用什么东西代换才算是适当的，这就要看所给的函数方程的具体特点了——这属于解题技巧问题．

［例 6］ 求函数 $f(x)$，如果

$$af(x^n)+f(-x^n)=bx, \tag{20}$$

其中 $a^2\neq 1$，n 是奇数．

解 把 x 换以 $-x$，由于 n 是奇数，就有

$$af(-x^n)+f(x^n)=-bx. \tag{21}$$

从(20)，(21)中消去 $f(-x^n)$，求得

$$f(x^n)=\frac{bx}{a-1}.$$

因为 n 是奇数，可以把 x^n 换成 x，所以最后有

$$f(x)=\frac{b\sqrt[n]{x}}{a-1}.$$

［例 7］ 解函数方程

$$af(x-1)+bf(1-x)=cx. \tag{22}$$

解 把 $(x-1)$ 代之以 x，那末 $(1-x)$ 就代之以 $-x$，而 x 就应代之以 $(1+x)$；

又如果把 $(x-1)$ 代之以 $-x$，那末 $(1-x)$ 就代之以 x，而 x 就应代之以 $(1-x)$．

分别代入原函数方程，就得

$$\begin{cases} af(x)+bf(-x)=c(1+x), \\ bf(x)+af(-x)=c(1-x). \end{cases}$$

解这个方程组，得知：

(1) 当 $a^2 \neq b^2$ 时，

$$f(x)=\frac{c}{a-b}x+\frac{c}{a+b};$$

(2) 当 $a^2=b^2$，而 $c\neq 0$ 时，$f(x)$ 不存在；

(3) 当 $a=b$，且 $c=0$ 时，$f(x)$ 是任何奇函数；

(4) 当 $a=-b$，且 $c=0$ 时，$f(x)$ 是任何偶函数。

［例 8］ 解函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y. \tag{23}$$

解 依次作下列代换：

$$x=0, \qquad y=t;$$

$$x=\frac{\pi}{2}+t, \quad y=\frac{\pi}{2};$$

$$x=\frac{\pi}{2}, \qquad y=\frac{\pi}{2}+t,$$

就得到方程组

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t, & (24) \\ f(\pi+t)+f(t)=0, & (25) \\ f(\pi+t)+f(-t)=-2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin t. & (26) \end{cases}$$

$(24)+(25)-(26)$，得

$$2f(t)=2f(0)\cos t+2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t.$$

就是

$$f(t)=f(0)\cos t+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t.$$

记

$$a=f(0),\ b=f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即得

$$f(x)=a\cos x+b\sin x.$$

有时候要把自变量代换成具体的数值才行. 而当 $f(x)$ 是定义在自然数上的函数时，往往要进行多次代换，才能求出这个函数. 记住等差数列和等比数列前 n 项和的公式，往往是很有用的.

我们知道，当首项为 a，公差为 d 时，等差数列前 n 项的和

$$\begin{aligned}S_n&=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]\\&=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}.\end{aligned}\tag{27}$$

特别是当 $a=1$, $d=1$ 时，

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.\tag{28}$$

对于首项为 a，公差为 $q(\neq 1)$ 的等比数列，前 n 项的和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.\tag{29}$$

特别是当 $a=q(\neq 1)$ 时，

$$S_n=a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{a(a^n-1)}{a-1}.\tag{30}$$

[例 9] 设函数 $f(n)$ 的定义域是自然数. 求 $f(n)$，使它满足条件

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+mn,\tag{31}$$

$$f(1)=1.\tag{32}$$

解 设 $m=1$，便有

$$f(n+1)=f(n)+n+1.$$

把 n 顺次用 1, 2, 3, …, $(k+1)$ 代换，就得

$$\begin{cases} f(2)=f(1)+2, \\ f(3)=f(2)+3, \\ f(4)=f(3)+4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f(k+1)=f(k)+(k+1). \end{cases}$$

把方程组的所有方程相加，得

$$\begin{aligned} f(k+1) &= f(1)+2+3+4+\cdots+(k+1) \\ &= 1+2+3+\cdots+(k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(n)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

[例 10] 函数 $f(n)$ 定义在自然数上，且满足

$$f(n)=f(n-1)+a^n, \tag{33}$$

$$f(1)=1. \tag{34}$$

求 $f(n)$.

解 把 n 分别代换以 2, 3, 4, …, n, 便得

$$\begin{cases} f(2)=f(1)+a^2, \\ f(3)=f(2)+a^3, \\ f(4)=f(3)+a^4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(n)=f(n-1)+a^n. \end{cases}$$

加在一起就化为

$$f(n)=f(1)+a^2+a^3+\cdots+a^n.$$

所以

$$f(n)=\begin{cases} n, & \text{当 } a=1 \text{ 时}, \\ 1+\dfrac{a^2(a^{n-1}-1)}{a-1}, & \text{当 } a\neq 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

[例 11] (1) n 个同学任意排成一队,共有多少种排法?

(2) 从 n 个同学中任意选出 $k(\leqslant n)$ 个同学排队,共有多少种排法?

解 (1) 设 n 个同学排队,共有 $f(n)$ 种排法. 如果再增加 1 个同学,让这位同学插入队伍. 对于原来 n 个同学的每一种排法,这位同学可以排在第 1 名(队首),第 2 名,第 3 名,…,第 $n+1$ 名(队尾),即有 $n+1$ 种"插"法. 因此

$$f(n+1)=(n+1)f(n). \tag{35}$$

而

$$f(1)=1.$$

依次令 $n=1, 2, 3, \cdots$,得

$$\begin{aligned} f(2)&=2f(1), \\ f(3)&=3f(2), \\ f(4)&=4f(3), \\ &\cdots\cdots \\ f(n+1)&=(n+1)f(n). \end{aligned}$$

把这些等式左右两边分别相乘,便有

$$\begin{aligned} &f(2)f(3)f(4)\cdots f(n+1) \\ &=2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1)f(1)f(2)f(3)\cdots f(n). \end{aligned}$$

依题意可知 $f(2)$、$f(3)$、…、$f(n)$ 都不为 0,故两边同除以 $f(2)f(3)f(4)\cdots f(n)$ 后,得到

$$\begin{aligned} f(n+1)&=2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1)f(1) \\ &=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+1). \end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(n)=n!.$$

这里,记号 $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$,读做 n 的阶乘.

就是说,n 个同学排成一队,共有 $n!$ 种排法.

(2) 设从 n 个同学选出 k 个同学排队,共有 $f_k(n)$ 种排

法．现在新增加一位同学，共有了$(n+1)$个同学，仍选出k个同学排队．k个同学排成的队伍可以分为两类：一类是这个新同学没有选进的队伍．这种排法按照假设应共有$f_k(n)$种．另一类是新同学被选入的队伍．设想这种队伍的排法是这样实现的：由新同学替换原来队伍中的旧同学．我们来看，如果新同学替换的是原队伍中的第1名，共有多少种排法：乍看起来，因为原队伍共有$f_k(n)$种排法，因而以新同学为队首的排法也有$f_k(n)$种．其实不然．因为在原队伍中，如果队首以后的$(k-1)$个同学及其排列顺序确定时，这时尚余$n-(k-1)=n-k+1$个同学可充当队首．因而有$n-k+1$种排法．但当队首被新同学替换后，就变成1种排法了．可见以新同学为队首的排法为$\frac{1}{n-k+1}f_k(n)$种．同样的，以新同学为第2名，第3名，…，第k名的队伍，排法也各有$\frac{1}{n-k+1}f_k(n)$种．总之，有新同学出现的队伍，排法一共有$\frac{k}{n-k+1}f_k(n)$种．于是，得函数方程

$$f_k(n+1)=f_k(n)+\frac{k}{n-k+1}f_k(n).$$

或者

$$f_k(n+1)=\frac{n+1}{n-k+1}f_k(n). \tag{36}$$

分别令$n=k,\ k+1,\ \cdots$，得

$$f_k(k+1)=\frac{k+1}{1}f_k(k),$$

$$f_k(k+2)=\frac{k+2}{2}f_k(k+1),$$

$$f_k(k+3)=\frac{k+3}{3}f_k(k+2),$$

························

$$f_k(n+1)=\frac{n+1}{n-k+1}f_k(n).$$

相乘，约去等式两边相同的因式(它们显然是不为0的)，得

$$f_k(n+1)=\frac{k+1}{1}\cdot\frac{k+2}{2}\cdot\frac{k+3}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n-k+1}f_k(k).$$

但由第(1)题知，

$$f_k(k)=k!.$$

所以

$$f_k(n+1)=\frac{(n+1)n\cdots(k+2)(k+1)\cdot k!}{(n-k+1)!}.$$

或者

$$f_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

这就是从 n 个同学中任意选出 $k(\leqslant n)$ 个同学排队的共有的排法.

在这里，我们实际上得到了排列公式：从 n 个不同的元素里，每次取出 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素，选排列(即 $k<n$ 时)数为

$$A_n^k=f_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\cdots(n-k+1);\quad(37)$$

全排列(即 $k=n$ 时)数为

$$P_n=A_n^n=n!.\quad(38)$$

(注意，我们规定 $0!=1$)

[例12] 求从 n 个不同的元素里，每次取出 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的组合数 $F_k(n)$ 公式，以及 $F_k(n)$ 所应满足的函数方程.

解 有了排列数公式，可以方便地推导出组合数公式，设

从 n 个不同的元素里，每次取出 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的排列数为 $f_k(n)$. 因为 k 个元素的全排列数为 $k!$，而这 $k!$ 个排列在组合中只算作1组. 因此，排列数与组合数间有如下关系:

$$f_k(n)=k!F_k(n). \tag{39}$$

代入(37)，得

$$F_k(n)=\frac{1}{k!}f_k(n)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{40}$$

这就是我们所要求的公式.

把(39)代入函数方程(36)，得

$$k!F_k(n+1)=\frac{n+1}{n-k+1}\cdot k!F_k(n),$$

即

$$F_k(n+1)=\frac{n+1}{n-k+1}F_k(n). \tag{41}$$

这就是组合数 $F_k(n)$ 所应满足的函数方程.

从 n 个不同的元素里，每次取出 k 个元素的组合数，通常记做 C_n^k. 这样，公式(40)可写成

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{42}$$

而公式(41)则可写成

$$C_{n+1}^k=\frac{n+1}{n-k+1}C_n^k. \tag{43}$$

[例13] (1) 直线上有 n 个点(任何两点不相重合). 这 n 个点把直线分成了多少部分(区间)?

(2) 平面上有 n 条直线(任何两条直线彼此相交，但任何三条直线不交于同一点). 这 n 条直线把平面分成了多少部分?

(3) 空间中有 n 个平面(任何三个平面彼此相交，而任何

四个平面却无公共点）．这 n 个平面把空间分成了多少部分?

解 (1) 设直线上 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 把直线分成了 $f_1(n)$ 个部分(图 6)．现在再加上一个点 A_{n+1}．这个点把原来的某一区间分成两个区间．所以 $f_1(n+1)$ 比 $f_1(n)$ 多 1．就是

$$f_1(n+1)=f_1(n)+1, \tag{44}$$



图 6

而

$$f_1(1)=2. \tag{45}$$

解函数方程(44)，得

$$f_1(n)=n+1.$$

就是说，直线上 n 个点把直线分成 $(n+1)$ 个部分．

(2) 设平面上 n 条直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 把平面分为 $f_2(n)$ 个部分(图 7)．增加一条直线 l_{n+1}．这条直线与原来的 n 条直线相交于 n 点．由第(1)题的结论，这 n 个点把直线分成 $(n+1)$ 个部分．这 $(n+1)$ 个部分的每一段都穿过原来的某一个区域，且把这个区域分成两部分．所以 $f_2(n+1)$ 比 $f_2(n)$ 多 $n+1$．就是

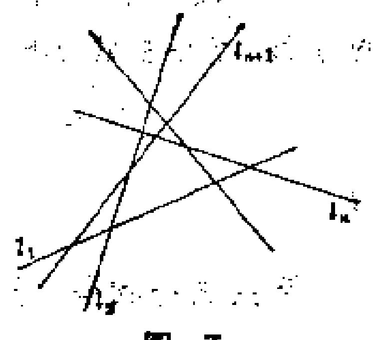


图 7

$$f_2(n+1)=f_2(n)+n+1, \tag{46}$$

而

$$f_2(1)=2. \tag{47}$$

进行一系列代换，得

$$f_2(2)=f_2(1)+2,$$

$$f_2(3)=f_2(2)+3,$$

$$f_2(4)=f_2(3)+4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_2(n+1)=f_2(n)+(n+1).$$

相加后，得

$$f_2(n+1)=f_2(1)+2+3+4+\cdots+(n+1).$$

或者

$$f_2(n+1)=\frac{n^2+3n+4}{2},$$

也就是

$$f_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

这就是说，n 条直线把平面分成 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个部分.

(3) 设 n 个平面把空间分成 $f_3(n)$ 个部分. 类似于上面的分析，可得函数方程

$$f_3(n+1)=f_3(n)+\frac{n^2+n+2}{2}. \tag{48}$$

而

$$f_3(1)=2. \tag{49}$$

依次进行代换，得

$$f_3(2)=f_3(1)+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}+1,$$

$$f_3(3)=f_3(2)+\frac{2^2}{2}+\frac{2}{2}+1,$$

$$f_3(4)=f_3(3)+\frac{3^2}{2}+\frac{3}{2}+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_3(n+1)=f_3(n)+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1.$$

相加即得

$$f_3(n+1)=f_3(1)+\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$+\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)+n.$$

但是

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{①}, \qquad (50)$$

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

所以

$$f_3(n+1)=2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}+n.$$

于是

$$f_3(n)=\frac{n^3+5n+6}{6}.$$

即 n 个平面把空间分成 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 部分.②

[例 14] 把圆分成 n 个不相等的扇形，并且用红、蓝、绿三种颜色给扇形染色，但不许相邻的扇形有相同的颜色. 共

---

① 这个等式将在第 33 页的例 18 中加以证明.

② 由于

$$n+1=1+n=C_n^0+C_n^1,\quad (\text{我们约定 } C_n^0=1.)$$
$$\frac{n^2+n+2}{2}=1+n+\frac{n(n-1)}{2}=C_n^0+C_n^1+C_n^2,$$
$$\frac{n^3+5n+6}{6}=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3.$$

我们看到了这样一个有趣的事实：一个 $m(m=1, 2, 3)$ 度空间用 n 个 $(m-1)$ 度空间分割，最多可以分成 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^m$ 个部分.

有多少种染法?

解 设把圆分成扇形 $S_1, S_2, \cdots, S_n$(图 8). 开始时,可以给 S_1 涂以任何一种颜色. 所以 S_1 有 3 种染法. S_1 染色后,S_2 的染法有 2 种:即涂上和 S_1 不同的两色中的任何一种. S_1, S_2 染色后,染 S_3 的方法也有 2 种,这是因为 S_3 可以与 S_1 同色. 在保持与前一个扇形不同色的条件下,这样顺次染下去,染色方法的总数为 $3\times 2^{n-1}$

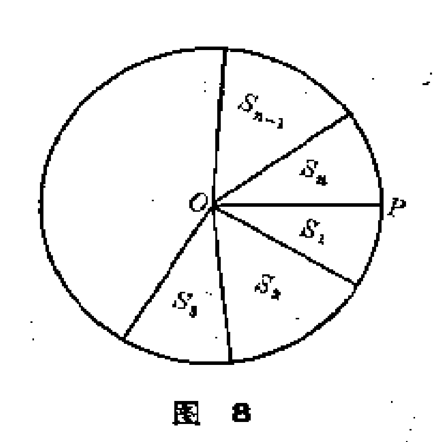


图 8

种. 但是应当注意,在这些染法中,显然还包含 S_n 与 S_1 同色的情形. 我们来看这种情形有多少种. 设有某一种染法使 S_n 与 S_1 同色,拆去 S_n 与 S_1 的分界半径 OP(图 8). 那末,这种染法其实就是分圆为 $n-1$ 个扇形时同色不相邻的染法. 因此,一般说来,设扇形数为 n 时,染法的总数为 $f(n)$. 于是得到函数方程:

$$f(n)+f(n-1)=3\times 2^{n-1}.$$

我们来解这个方程. 以 $(-1)^n$ 乘它的两边,得

$$(-1)^n f(n)-(-1)^{n-1}f(n-1)=-3\times(-2)^{n-1}.$$

同理有

$$(-1)^{n-1}f(n-1)-(-1)^{n-2}f(n-2)=-3\times(-2)^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^3 f(3)-(-1)^2 f(2)=-3\times(-2)^2.$$

显然

$$(-1)^2 f(2)=-3\times(-2).$$

加在一起,并把右边的等比数列用和表示,得

$$(-1)^n f(n)=-3\cdot(-2)\cdot\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=2[1-(-2)^{n-1}].$$

$$\therefore\quad f(n)=2^n+(-1)^n\cdot 2.$$

就是说，一共有 $2^n+(-1)^n\cdot 2$ 种染法。

练习 1 解函数方程：

$$2f(x^2)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=x.\quad (x>0)$$

练习 2 解函数方程：

$$af(x^3)+bf(-x^3)=cx.\quad (a^2\neq b^2)$$

练习 3 解函数方程：

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x.\quad (x\neq 0,\ x\neq 1)$$

练习 4 已知 $f(1)=10$，且

$$f(n+1)-f(n)=10n+9,$$

求 $f(n)$。

练习 5 已知 $f(1)=0$，$f(2)=1$。解函数方程：

$$a^2f(n+2)=b^2f(n).\quad (a>0,\ b>0)$$

练习 6 (1) 凸 n 边形有多少条对角线？

(2) 凸 n 边形的内角和是多少度？

练习 7 (1) 两两相交但不共点的 n 个圆把平面分成了几部分？

(2) 俩两相交但不共点的 n 个球把空间分成了几部分？

3. 函数方程的递归解法

上节最后几个例题清楚地表明，对于由自然数的函数组成的方程，代换法是一个相当有效的方法．但是，这种方法也会有失效的时候．请看例1中由养兔问题而得到的函数方程：

$$f(n+2)=f(n+1)+f(n), \qquad (5)$$
$$f(1)=1,\ f(2)=1.$$

如果分别令 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，就得到

$$f(3)=f(2)+f(1),$$
$$f(4)=f(3)+f(2),$$
$$f(5)=f(4)+f(3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(n+2)=f(n+1)+f(n).$$

加在一起，得

$$f(n+2)=f(2)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n).$$

仍然未能求得我们所需要的函数 $f(n)$，即无法用 n 的代数式来表示 $f(n)$．

这时候，使用一种叫递归法的方法，也许会获得成功．

我们知道，定义在自然数上的函数 $f(n)$，当自变量 n 依次取 1, 2, 3, …等值时，就形成一个数列

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots.$$

因而可以借助于数列对这种函数组成的函数方程加以研究．

给出一个数列，通常可有三种方法：一是用通项公式，一

是用递推公式，一是用递归公式．所谓通项公式，就是用自然数 n 的表达式来表示数列的"通项" $f(n)$ 的公式．所谓递推公式，就是由含有数列前边的若干项的表达式来表示后边某一项的公式．如果这种表达式中仅含数列前边的若干项(允许有常数系数)，这个公式就叫递归公式．

例如自然数列，用通项公式来表示是

$$f(n)=n. \tag{51}$$

用递推公式来表示就是

$$f(n+1)=f(n)+1. \tag{52}$$

用递归公式来表示又成为

$$f(n+2)=2f(n+1)-f(n). \tag{53}$$

又如自然数的平方组成的数列

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots.$$

它的这三个公式分别是

通项公式：

$$f(n)=n^2. \tag{54}$$

递推公式：

$$f(n+1)=f(n)+2n+1, \tag{55}$$

递归公式：

$$f(n+3)=3f(n+2)-3f(n+1)+f(n). \tag{56}$$

这里有几个关系值得注意：

第一，通项公式与其他两个公式的关系．从函数方程的观点看来，递推、递归公式实际上都是函数方程，而通项公式则是它们的解．这一点，从(51)～(53)，(54)～(56)可以明显地看出来．

第二，递推公式与递归公式间的关系．从定义上看，递归公式也是一种递推公式，二者是从属关系，或特殊与一般的关

系．不过为了叙述上的方便，我们把只含数列中的项（可以带有系数）的递推公式叫递归公式．递归公式的一般形式是

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\cdots+a_kf(n).\tag{57}$$

这是用数列中连续 k 项的表达式来表示紧接着的后一项．这里，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是常数系数．公式(57)更精确地称做是 k 阶递归公式．

一般说来，由递推公式能够推导出递归公式．以(55)的递推公式为例．

因为

$$f(n+1)=f(n)+2n+1,$$

同样地有

$$f(n+2)=f(n+1)+2n+3.$$

后式减去前式，移项得

$$f(n+2)=2f(n+1)-f(n)+2.$$

类似地有

$$f(n+3)=2f(n+2)-f(n+1)+2.$$

后式减去前式，移项得

$$f(n+3)=3f(n+2)-3f(n+1)+f(n).\tag{58}$$

这是一个三阶递归公式．

第三，三个公式与数列的关系．一旦给出通项公式，数列便被唯一地确定了．但递推公式特别是递归公式却不然．给出一个递归公式后，会有无穷多数列都满足这个递归公式．这是因为，由 k 阶递归公式的数列，它的前 k 项无法由递归公式本身确定．但当给出了这个数列的前 k 项的值后，递归公式就唯一地确定了数列．我们把数列前 k 项的值叫*初值条件*．同一个递归公式，由于初值条件不同，将得到不同的数列．

例如，递推公式(58)是一个三阶递归公式．只有当初值条件取

$$f(1)=1^2,\ f(2)=2^2,\ f(3)=3^2$$

时，才对应自然数的平方的数列．事实上，

$$\begin{aligned} f(4) &= 3f(3)-3f(2)+f(1) \\ &= 3\times 3^2-3\times 2^2+1^2=4^2, \\ f(5) &= 3f(4)-3f(3)+f(2) \\ &= 3\times 4^2-3\times 3^2+2^2=5^2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

如果改变初值条件，比如取

$$f(1)=0,\ f(2)=2,\ f(3)=1$$

时，不难算得：

$$f(4)=-3,\ f(5)=-10,\ f(6)=-20,\ \cdots.$$

数列就不再是自然数平方数列了．

一般说来，递归公式(57)

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\cdots+a_kf(n)$$

可以对应无穷多的数列，只要选取不同的初值条件，亦即对数列的前 k 项

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(k)$$

给以不同的值就行了．反过来说，有无穷多个数列满足递归公式(57)．只有在初值条件给出后，数列才完全确定．

特别是，我们能够构造出首项为 1，公比为 q 的等比数列，使它满足递归公式(57)：

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \cdots,\ q^n,\ \cdots.$$

事实上，只要公比满足方程

$$q^{n+k-1}=a_1q^{n+k-2}+a_2q^{n+k-3}+\cdots+a_kq^{n-1} \tag{58}$$

就可以了．方程(58)两边同除以 q^{n-1}，得

$$q^k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots+a_k. \qquad (59)$$

这就是说，公比 q 应当是方程(59)的根．这样一来，一个等比数列，只要当它的公比 q 满足以 k 阶递归公式(57)的相当系数为系数的代数方程(59)时，它必能满足这个递归公式．

方程(59)叫递归公式(49)的*特征方程*．

还应当指出：

如果一个数列满足递归公式(57)，那末给数列的各项乘以相同的常数，所得的新数列仍满足原递归公式(57)；

如果两个数列都满足同一个递归公式(57)，那末它们对应项的和所组成的新数列仍满足原递归公式(57)；

由此又得到：如果两个数列都满足同一个递归公式(57)，那末，给两数列的各项分别乘以常数(同一数列的各项要乘同一常数，但两数列所乘的常数可不必相同)，再把对应项加起来，所成的数列仍满足原递归公式(57)．

上述这些性质都显而易见，证明也并不难．

应用所有这些结果，即可解某些定义在自然数上的函数方程了．

［例 15］ 解由例 1 的养兔问题而得的函数方程

$$f(n+2)=f(n+1)+f(n). \qquad (5)$$

解 对应的特征方程是

$$q^2=q+1. \qquad (60)$$

解这个方程，得

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

如前所述，数列

$$A+B,\ Aq_1+Bq_2,\ Aq_1^2+Bq_2^2,\ \cdots,\ Aq_1^{n-1}+Bq_2^{n-1},\ \cdots$$

满足递归公式(5)．这里 A, B 是待定的常数，它们满足初

值条件

$$A+B=f(1)=1, \tag{61}$$

$$Aq_1+Bq_2=f(2)=1. \tag{62}$$

解由方程(61)，(62)组成的方程组，得

$$A=\frac{1-q_2}{q_1-q_2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}};\quad B=\frac{1-q_1}{q_2-q_1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

$$\therefore\quad f(n)=Aq_1^{n-1}+Bq_2^{n-1}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

就是

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{63}$$

这就是说，第 n 个月，共有大兔 $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$对。

诚然，公式(63)是不便于实际计算的。但利用下列近似数值和常用对数表，即可求得 $f(n)$ 的近似值：

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=0.44721,\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.61803,$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.61803.$$

例如 $n=12$ 时，$1.61803^{12}=321.992$，$(-0.61803)^{12}=0.003$，$321.992-0.003=321.989$，$321.989\times0.44721\approx144$。即一年后大兔有144对。使用数学归纳法或其他方法，可以证明对任何 n，$f(n)$ 都是正整数；但在用近似数计算时却只近似地得到整数。

[例 16] 已知

$$f(1)=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\ f(2)=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\ (\alpha\neq\beta) \tag{64}$$

且

$$f(n+2)=(\alpha+\beta)f(n+1)-\alpha\beta f(n). \tag{65}$$

求证

$$f(n)=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}. \tag{66}$$

证　函数方程(65)的特征方程是

$$q^2=(\alpha+\beta)q-\alpha\beta,$$

$$\therefore\quad q_1=\alpha,\ q_2=\beta.$$

根据初值条件(64)，设

$$A+B=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad A\alpha+B\beta=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}.$$

求得

$$A=\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2},\quad B=\frac{\beta^2(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(n)&=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}\\&=\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\alpha^{n-1}+\frac{\beta^2(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\beta^{n-1}\\&=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

有时候，特征方程具有虚数根．试看下例．

[例 17]　已知

$$\frac{19}{37}=0.513513513\cdots.$$

求小数点后第 n 位的数字．

解　设小数点后的第 n 位数字是 $f(n)$．于是有初值条件

$$f(1)=5,\ f(2)=1,\ f(3)=3,$$

且

$$f(n+3)=f(n). \tag{67}$$

对应的特征方程是

$$q^3=1.$$

$$\therefore \quad q_1=1,\ q_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$q_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

所以有

$$\begin{aligned} f(n)&=A+B\left[-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{n-1} \\ &\quad+C\left[-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{n-1} \\ &=A+(-1)^{n-1}B\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{3}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right] \\ &\quad+(-1)^{n-1}C\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right] \\ &=A+(-1)^{n-1}(B+C)\cos\frac{(n-1)\pi}{3} \\ &\quad+(-1)^{n-1}(-B+C)i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}. \end{aligned}$$

令 $B+C=A_1$, $(-B+C)i=A_2$, 就得

$$\begin{aligned} f(n)&=A+(-1)^{n-1}A_1\cos\frac{(n-1)\pi}{3} \\ &\quad+(-1)^{n-1}A_2\sin\frac{(n-1)\pi}{3}. \end{aligned}$$

因而有

$$\begin{cases} f(1)=A+A_1=5, \\ f(2)=A-\frac{1}{2}A_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_2=1, \\ f(3)=A-\frac{1}{2}A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}A_2=3. \end{cases}$$

从中解出

$$A=3,\ A_1=2,\ A_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

最后得

$$f(n)=3+(-1)^{n-1}\cdot 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}. \qquad (68)$$

例如，小数点后的第100位的数字是

$$f(100)=3-2\cos 33\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 33\pi=5.$$

特征方程还有出现重根的情形．例如自然数的平方组成的数列，它的三阶递归公式(56)

$$f(n+3)=3f(n+2)-3f(n+1)+f(n)$$

对应的特征方程是

$$q^3=3q^2-3q+1,$$

即

$$(q-1)^3=0. \qquad (69)$$

显然这个方程有三重根 $q=1$．这时确定待定的系数就不能用前面的方法了．

我们这里不去讨论最一般的情形，只来研究一下特征方程的所有重根都相等这种很特殊的情形．上述特征方程(69)就属于这种情形．

设有一个 k 阶递归公式

$$f(n+k)=C_k^{k-1}\alpha f(n+k-1)-C_k^{k-2}\alpha^2 f(n+k-2)$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^0\alpha^k f(n). \qquad (70)$$

其中 C_k^{k-1}, C_k^{k-2}, $\cdots$, C_k^0 分别表示从 k 个不同元素中每次取 $k-1$ 个，k 个，$\cdots$，0 个元素的组合数．递归公式(70)对应的

特征方程是

$$q^k=C_k^{k-1}\alpha q^{k-1}-C_k^{k-2}\alpha^2q^{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^0\alpha^k. \quad (71)$$

它可以写成

$$(q-\alpha)^k=0.$$

可见 α 是特征方程(71)的 k 重根：$q=\alpha$.

可以验证(具体验证过程这里略去)，下面的 k 个数列中的任何一个都满足递归公式(70)：

$$\begin{cases} 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1},\ \cdots \\ 0,\ \alpha,\ 2\alpha^2,\ \cdots,\ (n-1)\alpha^{n-1},\ \cdots \\ 0,\ \alpha,\ 2^2\alpha^2,\ \cdots,\ (n-1)^2\alpha^{n-1},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0,\ \alpha,\ 2^{k-1}\alpha^2,\ \cdots,\ (n-1)^{k-1}\alpha^{n-1},\ \cdots. \end{cases} \quad (72)$$

其中 α 是特征方程(71)的 k 重根.

而且可以证明(证明过程这里也予略去)，满足递归方程(70)的数列，它的通项

$$f(n)=[B_0+B_1(n-1)+\cdots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}]\alpha^{n-1}, \quad (73)$$

其中 $B_0,\ B_1,\ \cdots,\ B_{k-1}$ 满足方程组

$$\begin{cases} B_0=f(1), \\ (B_0+B_1+\cdots+B_{k-1})\alpha=f(2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [B_0+B_1(k-1)+\cdots+B_{k-1}(k-1)^{k-1}]\alpha^{k-1}=f(k). \end{cases} \quad (74)$$

因此，要求 $f(n)$，只要由特征方程求出重根 α，再由方程组(74)求出 $B_0,\ B_1,\ \cdots,\ B_{k-1}$，最后代入(73)就可以了.

[例 18] 求自然数列前 n 项的平方和：

$$f(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2. \quad (75)$$

解 显然有函数方程

$$f(n+1)=f(n)+(n+1)^2. \quad (76)$$

把上边的递推形式化为递归形式：

$$f(n+4)=4f(n+3)-6f(n+2)+4f(n+1)-f(n). \quad (77)$$

对应的特征方程是

$$q^4=4q^3-6q^2+4q-1,$$

即

$$(q-1)^4=0.$$

这个方程有 4 重根 $q=\alpha=1$.

根据方程组(74)得

$$\begin{cases} B_0=f(1)=1^2=1, \\ B_0+B_1+B_2+B_3=f(2)=1^2+2^2=5, \\ B_0+2B_1+4B_2+8B_3=f(3)=1^2+2^2+3^2=14, \\ B_0+3B_1+9B_2+27B_3=f(4)=1^2+2^2+3^2+4^2=30. \end{cases}$$

由这个方程组解出：

$$B_0=1, \quad B_1=\frac{13}{6}, \quad B_2=\frac{3}{2}, \quad B_3=\frac{1}{3}.$$

代入(73)，并注意 $\alpha=1$，即得

$$f(n)=1+\frac{13}{6}(n-1)+\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

练习 8 已知 $f(1)=0$, $f(2)=1$，解函数方程

$$f(n+2)=f(n+1)+2f(n).$$

练习 9 解练习 5 所给的函数方程：

$$a^2f(n+2)=b^2f(n),$$

已知 $f(1)=0$, $f(2)=1$.

练习 10 设 $f(0)=2$, $f(1)=3$，且

$$f(n+2)=3f(n+1)-2f(n).$$

求证：$f(n)=2^n+1$.

练习 11 已知数列满足条件

$$a_k=3a_{k-1}+2^{k-1},\ k\geqslant 2,\ a_1=1.$$

求数列的通项公式.

练习 12 求前 n 个自然数的立方和:

$$f(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

4. 函数方程的柯西解法

在函数方程的发展史上，许多函数方程的建立和解法都是由柯西[①]首先提出的．本节我们就来研究函数方程的柯西解法．

在前几节讨论的函数方程中，所涉及的函数大多数是自然数的函数．而本节中的函数，它的定义域都是在某一区间上的实数．

柯西解法的步骤是：依次求出对于自变量的所有自然数值、整数值、有理数值，直至所有实数值的函数方程的解．

如所周知，一个函数方程的解往往并不是唯一的．也就是说，可能存在着不同的函数，满足同一个函数方程．为了保证函数方程的解的唯一性，通常需要给所求的函数附加一些条件，例如要求所求的函数必须是连续的，或者必须是单调的．在本节里，要求函数方程的解都必须是单调函数．

什么是单调函数呢？如果对于较大的自变量的值，函数值也较大；即当$x_2>x_1$时，有$f(x_2)>f(x_1)$，就说函数$f(x)$单调增加．如果对于较大的自变量的值，函数值反而较小；即当$x_2>x_1$时，有$f(x_2)<f(x_1)$，就说函数$f(x)$单调减小．单调增加和单调减小的函数，统称*单调函数*．

在后面的讨论中，我们还要用到*区间套原理*．这个原理是这样的：

设有一个区间序列：

---

① 柯西(1789～1857)，法国数学家．

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], [\alpha_3, \beta_3], \cdots, [\alpha_n, \beta_n], \cdots, \quad (78)$$

其中每个区间都包含着后一个区间：

$$[\alpha_i, \beta_i] \supset [\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}], \ (i=1, 2, 3, \cdots)$$

(其中 $\supset$ 是集的包含符号)形成一个“区间套”，而且区间长度可以任意地小(就是说，不论我们事先给定一个多么小的正数 ε，序列(78)中总存在这样一个区间，从此以后所有的区间的长度都小于 ε)。那末，必定存在着唯一的一个点 ξ，被所有(无穷多)这些区间所包含。

特别是当 ξ 是无理数时，如果把 α_n 和 β_n 取作 ξ 的精确到 10^{-n} 的不足近似值和过剩近似值．那末以 ξ 的不足近似值和过剩近似值为端点，将构成一个区间套．相应的区间的长度是 10^{-n}．例如，我们知道，圆周率 π 是一个无理数：

$$\pi = 3.141592653589793\cdots.$$

于是，可以构成区间套

$$[3.1, 3.2] \supset [3.14, 3.15] \supset [3.141, 3.142] \supset \cdots.$$

区间的长度依次是 $3.2-3.1=10^{-1}$，$3.15-3.14=10^{-2}$，$3.142-3.141=10^{-3}$，$\cdots$．我们注意到，每个区间的端点 α_n 和 β_n 都是有理数，而只有唯一的一个无理数 $\alpha=\pi$ 被包含在所有这些区间之内．

有了这些准备之后，我们转入函数方程的柯西解法的讨论．

［例 19］ 解函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \quad (79)$$

解 由函数方程(79)容易推得(用数学归纳法)：

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n). \quad (80)$$

在(80)中如果令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，就得到

$$f(nx)=nf(x).$$

再令 $x=\frac{m}{n}$(m 是正整数)，又有

$$nf\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(n\cdot\frac{m}{n}\right)=f(m)=f(m\cdot 1)=mf(1).$$

所以

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(1)\cdot\frac{m}{n}.$$

记常数 $f(1)=c$. 于是对于任何正有理数 $x>0$, 都有

$$f(x)=cx. \tag{81}$$

当自变量的值为零时，即令 $x=y=0$, 由函数方程(79), 有

$$f(0)=f(0)+f(0),$$

$$\therefore \quad f(0)=0=c\cdot 0.$$

这就是说，对于自变量的值为零的情形，函数方程(79)的解也是(81).

对于自变量为负数的情形，如 x 为负有理数，可设 $y=-x>0$. 于是有

$$f(x)+f(y)=f(x+y)=f(0)=0.$$

所以

$$f(x)=-f(y)=-cy=cx.$$

总之，对于自变量的任何有理数值 $x=r$, 函数方程(79)的解都是(81):

$$f(r)=cr. \tag{82}$$

现在来讨论自变量是无理数的情形. $x=\xi$(ξ 是无理数). 设 ξ 的精确到小数点后第 i 位的不足近似值和过剩近似值是 α_i 和 β_i. 根据 $f(x)$ 的单调性(为确定起见，不妨设 $f(x)$ 是单调增加的)，推知

$$f(\alpha_i)<f(\xi)<f(\beta_i). \quad (i=1, 2, 3, \cdots) \tag{83}$$

因为 $c=f(1)>f(0)=0$，由

$$\alpha_i<\xi<\beta_i$$

又得

$$c\alpha_i<c\xi<c\beta_i.$$

由于 α_i, β_i 是有理数，由(83)得

$$c\alpha_i<f(\xi)<c\beta_i. \tag{84}$$

比较(83)和(84)，看出 $c\xi$ 和 $f(\xi)$ 处于同一个区间套之内．根据区间套原理，只有一个点为所有区间套公有，得知

$$f(\xi)=c\xi. \tag{85}$$

综合(82)和(85)，即得：对于任何实数 x，函数方程(79)的解是正比例函数

$$f(x)=cx.$$

[例 20]　解例 2 中的函数方程

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y), \tag{9}$$

并求出由摄氏温度换算为华氏温度的关系式。

解　在函数方程(9)中，令 $y=0$，就有

$$2f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)+f(0),$$

或者

$$f(2x)=2f(x)-f(0). \tag{86}$$

用数学归纳法可以证明，

$$2f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2}\right)$$
$$=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)-(n-2)f(0). \tag{87}$$

事实上，设 $n=k$ 时，方程(87)成立，即设

$$2f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{2}\right)$$
$$=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)-(k-2)f(0).$$

于是有

$$2f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{2}\right)=2f\left[\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}}{2}\right]$$

$$=f(x_1+x_2+\cdots+x_k)+f(x_{k+1})$$

$$=f\left(\frac{2x_1+2x_2+\cdots+2x_k}{2}\right)+f(x_{k+1})$$

$$=\frac{1}{2}[f(2x_1)+f(2x_2)+\cdots+f(2x_k)$$

$$-(k-2)f(0)]+f(x_{k+1}).$$

根据(86)，得

$$2f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[2f(x_1)-f(0)+2f(x_2)-f(0)+\cdots+2f(x_k)$$

$$-f(0)-(k-2)f(0)]+f(x_{k+1})$$

$$=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})-(k-1)f(0).$$

就是说，对于 $n=k+1$，方程(87)仍然成立．又当 $n=2$ 时，显然有

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(x_1)+f(x_2)$$

$$=f(x_1)+f(x_2)-(2-2)f(0).$$

这就证明了由函数方程(9)可以推出函数方程(87)．

在(87)中，令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，即得

$$2f\left(\frac{n}{2}x\right)=nf(x)-(n-2)f(0). \qquad (88)$$

又令 $x=\frac{m}{n}$（m 是正整数），则有

$$2f\left(\frac{m}{2}\right)=nf\left(\frac{m}{n}\right)-(n-2)f(0),$$

就是

$$nf\left(\frac{m}{n}\right)=2f\left(\frac{m}{2}\right)+(n-2)f(0).$$

但由(88)知

$$2f\left(\frac{m}{2}\right)=2f\left(\frac{m}{2}\cdot 1\right)=mf(1)-(m-2)f(0).$$

代入上式即得

$$\begin{aligned}nf\left(\frac{m}{n}\right)&=mf(1)-(m-2)f(0)+(n-2)f(0)\\&=mf(1)-mf(0)+nf(0)\\&=m[f(1)-f(0)]+nf(0).\end{aligned}$$

因而

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}[f(1)-f(0)]+f(0).$$

记 $f(1)-f(0)=c_1$, $f(0)=c_2$. 最后有

$$f(x)=c_1x+c_2, \tag{89}$$

当 $x=0$ 时，显然有

$$c_1x+c_2=c_2=f(0). \tag{90}$$

如果令 $y=-x>0$, 就有

$$2f(0)=f(x)+f(-x).$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=2f(0)-f(-x)=2c_2-[c_1(-x)+c_2]\\&=c_1x+c_2.\end{aligned} \tag{91}$$

总之，由(89), (90), (91)得，对于任何有理数 $x=r$, 函数方程(9)的解是

$$f(r)=c_1r+c_2. \tag{92}$$

现在，讨论自变量是无理数的情形：$x=\xi$(ξ 是无理数). 设 ξ 的精确到小数点后第 i 位的不足近似值和过剩近似值是

α_i 和 β_i. 根据 $f(x)$ 的单调性[不妨假定 $f(x)$ 是单调增加的. 单调减小情形的论证类似]推知,

$$f(\alpha_i)<f(\xi)<f(\beta_i). \quad (i=1, 2, 3, \cdots) \tag{93}$$

同样根据单调增加性,得知

$$c_1=f(1)-f(0)>0.$$

所以由

$$\alpha_i<\xi<\beta_i$$

可得

$$c_1\alpha_i+c_2<c_1\xi+c_2<c_1\beta_i+c_2,$$

而由于 α_i, β_i 是有理数,所以(93)又可写成

$$c_1\alpha_i+c_2<f(\xi)<c_1\beta_i+c_2. \tag{94}$$

(93) 和 (94) 表明 $c_1\xi+c_2$ 和 $f(\xi)$ 处于同一个区间套之内. 根据区间套原理,就有

$$f(\xi)=c_1\xi+c_2. \tag{95}$$

综合(92), (95), 可知对于任何实数 x, 函数方程(9)的解是一次函数

$$f(x)=c_1x+c_2. \tag{96}$$

现在来求由摄氏温度换算为华氏温度的关系式.

由(10)知

$$c_2=f(0)=32.$$

此外,由(10)还知

$$100c_1+c_2=212.$$

所以

$$c_1=\frac{212-c_2}{100}=\frac{9}{5}.$$

最后得

$$f(x)=\frac{9}{5}x+32.$$

[例 21]　解例 4 中的函数方程

$$f(x)f(y)=f(x+y). \tag{16}$$

解　由(16)容易推得(用数学归纳法)：

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=f(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

如果令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，对于任何实数 x 和自然数 n，就有

$$[f(x)]^n=f(nx). \tag{97}$$

在(97)中，令 $x=\frac{1}{m}$(m 是自然数)，便有

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\left[f\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n=\left\{\left[f\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m\right\}^{\frac{n}{m}}=[f(1)]^{\frac{n}{m}}.$$

记 $f(1)=c$，就得

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=c^{\frac{n}{m}}. \tag{98}$$

令 $y=0$，对于任何实数 x，由(16)得

$$f(x)f(0)=f(x).$$

因为 $f(x)$ 是单调的，所以 $f(x)$ 不恒等于零．从而

$$f(0)=1=c^0. \tag{99}$$

如果令 $y=-x=\frac{n}{m}$，那末由(16)又得

$$f\left(-\frac{n}{m}\right)f\left(\frac{n}{m}\right)=f(0)=1.$$

所以

$$f\left(-\frac{n}{m}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{n}{m}\right)}=\frac{1}{c^{\frac{n}{m}}}=c^{-\frac{n}{m}}. \tag{100}$$

(98)，(99)，(100)表明，对于任何有理数 r，满足函数方程(16)的是指数函数

$$f(r)=c^r.$$

对于自变量为无理数的情形，推证方法和例 19，20 类似，这里从略.

总之，函数方程(16)的解是指数函数

$$f(x)=c^x.$$

由此可见，放射性物质的衰变规律服从指数函数. 进一步研究得知，1 克的放射性物质经过时间 x 年后，剩余的放射性物质为

$$f(x)=e^{-\lambda x}.$$

就是说，指数的底 $c=e$①，而 λ 是一个与具体放射性物质有关的常数.

[例 22] 解函数方程

$$f(xy)=f(x)+f(y). \tag{101}$$

函数的定义域是正实数.

解 在(101)中，如果令 $y=1$，就有

$$f(x)=f(x)+f(1).$$

$$\therefore\quad f(1)=0. \tag{102}$$

又由(101)容易推得

$$f(x_1x_2\cdots x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，即得

$$f(x^n)=nf(x). \tag{103}$$

在上式中，以 $\sqrt[n]{x}$ 代 x，又得

$$f(x)=nf(\sqrt[n]{x}).$$

$$\therefore\quad f(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}f(x). \tag{104}$$

设 $r=\dfrac{p}{q}$ 是正有理数(p，q 是正整数). 由(103)，(104)

① e 是自然对数的底；$e=2.718281828459045\cdots$.

就有

$$f(x^{\frac{p}{q}})=f(\sqrt[q]{x^p})=\frac{1}{q}f(x^p)=\frac{p}{q}f(x). \tag{105}$$

在函数方程(101)中，如果令 $y=\frac{1}{x}$，就得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=0.$$

$$\therefore\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

或者

$$f(x^{-1})=(-1)f(x). \tag{106}$$

仍设 r 是正有理数. 于是由(106)，(103)有

$$f(x^{-r})=f[(x^r)^{-1}]=-f(x^r)=(-r)f(x). \tag{107}$$

此外

$$f(x^0)=f(1)=0=0\cdot f(x). \tag{108}$$

综合 (105)，(107)，(108) 所得结果，证明了对于任何有理数 r，都有

$$f(x^r)=rf(x).$$

当指数为无理数 α 时，仿照例 19, 20 那样，可以证明

$$f(x^\alpha)=\alpha f(x). \tag{109}$$

因而有

$$f(x^y)=yf(x), \tag{110}$$

其中 y 是任何实数.

因为 $f(x)$ 是单调的，所以不能恒等于零. 从而存在着值 $x=c$，使得 $f(c)\neq 0$. 在(110)中，令 $x=c$, $y=\frac{1}{f(c)}$. 可得

$$f[c^{\frac{1}{f(c)}}]=1,$$

记 $c^{\frac{1}{f(c)}}=a$. 那末有

$$f(a)=1.$$

于是

$$f(a^y)=yf(a)=y.$$

令 $x=a^y$，或 $y=\log_a x$，可得

$$f(x)=\log_a x.$$

这就是说，函数方程(101)的解是对数函数.

值得指出的是，例19所讨论的函数方程(79)

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

是一个很重要的方程. 这方程是由柯西最早加以研究的，后来就叫做柯西函数方程. 我们立即就会看到，柯西函数方程在解函数方程上的作用：有许多其它函数方程，都可以通过适当方法转化为柯西函数方程，从而获得解答. 试看以下例子.

［例23］ 用柯西方程解例20中的函数方程

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y).$$

解 设 $f(0)=a$. 由所给的函数方程得

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x+0}{2}\right)=\frac{1}{2}[f(x)+f(0)]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x)+a].$$

由此又有，

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]=f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}[f(x+y)+a].$$

$$\therefore\ f(x+y)=f(x)+f(y)-a. \tag{111}$$

设 $g(x)=f(x)-a$，就有 $g(x+y)=f(x+y)-a$，$g(y)=f(y)-a$. 代入(111)，即得

$$g(x+y)=g(x)+g(y). \tag{112}$$

这方程正是柯西函数方程. 所以有

$$g(x)=cx.$$

$$\therefore\quad f(x)=cx+a.$$

这和我们在例 20 中所获得的结果是一致的，但解答过程却简短多了。

〔例 24〕 用柯西方程解例 21 中的函数方程

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

解 我们首先证明 $f(x)>0$. 由所给的函数方程得知

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant 0.$$

这就是说，对于 x 的任何实数值，$f(x)$的值是非负数. 我们进一步证明，对于 x 的任何实数值，$f(x)$不能是零. 实际上，一旦存在某个 x_0，能使 $f(x_0)=0$. 那末 $f(x)$将恒等于零. 这是因为

$$f(x)=f[(x-x_0)+x_0]=f(x-x_0)f(x_0)=0.$$

这样一来，就与我们在本节初对 $f(x)$ 的单调性要求相矛盾了。总之，对于任何实数 x，总有 $f(x)>0$.

在所给的函数方程两边同时取对数，即得

$$\log_a f(x+y)=\log_a f(x)+\log_a f(y).$$

设 $g(x)=\log_a f(x)$，就有

$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

这样就把原函数方程化成了柯西方程. 柯西方程的解是正比例函数

$$g(x)=c_1x.$$

$$\therefore\quad \log_a f(x)=c_1x.$$

即

$$f(x)=a^{c_1x}=(a^{c_1})^x=c^x,$$

这里，$c=a^{c_1}$. 所得的结果和例 21 相同。

练习 13 用柯西方程解函数方程

$$f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}. \qquad (x\neq 0)$$

练习 14 用柯西方程解例 22 中的方程

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

练习 15 利用函数方程

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

的解是指数函数 $f(x)=c^x$ 这一结果(例 21, 24), 解定义在正实数上的函数方程

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

5. 用函数方程定义初等函数

在上节中我们看到，某些函数方程的解恰是基本的初等函数．例如，函数方程(101)

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的解是对数函数

$$f(x)=\log_a x.$$

一般说来，如果有某两个单调函数都满足这个函数方程，那末它们都是对数函数，差别只在于对数的底 a 不同而已(为了保证解的唯一性，可以给出补充条件 $f(a)=1$)．这说明，函数方程(101)刻划了对数函数的特有属性．从这个函数方程出发，而不必从对数函数的通常定义出发，我们同样可以推出对数函数的一系列性质．现在对照排列如下：

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y; \qquad f(xy)=f(x)+f(y). \qquad (101)$$

$$\log_a x^n=n\log_a x; \qquad f(x^n)=nf(x). \qquad (103)$$

$$\log_a \sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x; \qquad f(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}f(x). \qquad (104)$$

$$\log_a 1=0; \qquad f(1)=0. \qquad (102)$$

因此，我们可以用函数方程来定义对数函数，也就是说，把对数函数定义为函数方程

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的解．

类似地，如我们在上节所讨论的，还可以把正比例函数 $f(x)=cx$ 定义为函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{79}$$

的解．把一次函数 $f(x)=c_1x+c_2$ 定义为函数方程

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y) \tag{9}$$

的解．把指数函数 $f(x)=c^x$ 定义为函数方程

$$f(x)f(y)=f(x+y) \tag{16}$$

的解．

不仅如此，用函数方程同样能定义其他基本初等函数，例如幂函数和三角函数．

本节我们主要讨论用函数方程定义余弦函数．由于余弦函数在整个实轴上不再具有单调性，本节里，我们将用连续性来代替单调性这个条件．

什么叫函数 $f(x)$ 的连续性？ 设 x_0 是某区间上的一点．如果当 $x\to x_0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续．在区间上每一点都连续的函数，叫做在这个区间上的连续函数．连续函数的图象是一条没有间隙的连续曲线．

我们知道，在三角学中有公式

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y.$$

这启示我们可以把余弦函数定义为函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{15}$$

的解 $f(x)$（这个函数方程我们在第1节的例8中曾遇到过了）．

为了使函数方程(15)的解 $f(x)$ 具有唯一性，还需给出下列条件：

1．函数 $f(x)$ 在整个实轴上连续．

2. 方程$f(x)=0$有一个最小正根$\frac{c}{2}$存在. 就是说

$$f\left(\frac{c}{2}\right)=0, \tag{113}$$

而当$0<x<\frac{c}{2}$时,

$$f(x)\neq 0. \tag{114}$$

3. $$f(0)>0. \tag{115}$$

(顺便指出,如果将这三个条件加以改变,函数方程(15)将定义另外的函数,例如可以用来定义一种叫做双曲余弦的函数.)

现在,我们从(15)和上述三条性质来证明,函数$f(x)$具有一系列性质,这些性质和我们通常所知道的余弦函数$\cos x$的性质完全一样.

性质1 $f(0)=1$.(对于余弦函数,我们知道$\cos 0=1$)

证明 在函数方程(15)中,令$x=y=0$. 就有

$$f(0)+f(0)=2[f(0)]^2.$$

但由(115)知道,$f(0)\neq 0$. 所以得

$$f(0)=1.$$

性质2 函数$f(x)$是偶函数:

$$f(x)=f(-x).$$

[对于余弦函数,有$\cos x=\cos(-x)$]

证明 在函数方程(15)中,令$x=0$,便得

$$f(y)+f(-y)=2f(0)f(y).$$

注意到$f(0)=1$,就有

$$f(-y)=f(y).$$

性质3 $f(c+x)=-f(x)$.[对于余弦函数,有$\cos(\pi+x)=-\cos x$]

证明 因为

$$f(c+x)+f(x)=f\left[\left(\frac{c}{2}+x\right)+\frac{c}{2}\right]+f\left[\left(\frac{c}{2}+x\right)-\frac{c}{2}\right]$$

$$=2f\left(\frac{c}{2}+x\right)f\left(\frac{c}{2}\right).$$

但$f\left(\frac{c}{2}\right)=0$．所以

$$f(c+x)=-f(x).$$

性质4 $f(c)=-1$．（对于余弦函数，有$\cos\pi=-1$）

证明 如果$x=0$，由性质3和1，得

$$f(c)=-f(0)=-1.$$

性质5 $f(2x)=2f^2(x)-1$．（对于余弦函数，有$\cos 2x=2\cos^2 x-1$）．

证明 因为

$$f(2x)+1=f(2x)+f(0)=2f^2(x).$$

$$\therefore\quad f(2x)=2f^2(x)-1.$$

性质6 $f\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+f(x)}{2}}$．（对于余弦函数，有$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$）

证明 在性质5的等式中，用$\frac{x}{2}$代x就行了．

性质7 $f(x)$是以$2c$为周期的周期函数．（余弦函数$\cos x$是以2π为周期的周期函数）

证明 以$x+c$代x．根据性质3有

$$f(2c+x)=-f(c+x)=f(x); \qquad (116)$$

可见$2c$是$f(x)$的周期．我们进一步证明，$2c$是$f(x)$的最小正周期．

倘若不然．假定$2l<2c$也是$f(x)$的正周期，将导致矛盾．事实上，因为$2c$，$2l$都是周期，所以有

$$f(2l)=f(2l+2c)=f(2c).$$

在(11б)中令 $x=0$, 并根据性质 1, 就有

$$f(2c)=f(0)=1.$$

$$\therefore\quad f(2l)=1.$$

此外，在函数方程(15)中，令 $x=y=l$, 又得

$$f(2l)+f(0)=2f^2(l).$$

因而

$$f^2(l)=1,$$

即

$$f(l)=\pm 1.$$

我们分别研究这两种情形.

如果 $f(l)=1$. 考虑到性质 4, 就有

$$f(c)+f(l)=0.$$

由函数方程(15), 上式左边可化为积的形式:

$$2f\left(\frac{c+l}{2}\right)f\left(\frac{c-l}{2}\right)=0.$$

根据性质 3 和 2, 可得

$$f\left(\frac{c+l}{2}\right)=f\left(c+\frac{l-c}{2}\right)=-f\left(\frac{l-c}{2}\right)=-f\left(\frac{c-l}{2}\right).$$

代入上式，化简后得

$$f^2\left(\frac{c-l}{2}\right)=0,$$

或

$$f\left(\frac{c-l}{2}\right)=0.$$

因为 $c-l<c$, 可见 $\frac{c-l}{2}$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个比 $\frac{c}{2}$ 还小的正根. 这和条件 2 矛盾.

如果 $f(l)=-1$. 在函数方程(15)中，令 $x=y=\frac{l}{2}$. 我们

求得

$$f(l)+f(0)=2f^2\left(\frac{l}{2}\right).$$

也就是

$$-1+1=2f^2\left(\frac{l}{2}\right).$$

$$\therefore\quad f\left(\frac{l}{2}\right)=0.$$

这也和条件 2 矛盾.

这就证明了 $2c$ 是 $f(x)$ 的最小正周期.

性质 8 $|f(x)|\leqslant 1$. (对于余弦函数, 有 $|\cos x|\leqslant 1$)

证明 仍采用反证法. 假定对 x 的某个值 $x=a$, 有

$$|f(a)|>1.$$

于是

$$\begin{aligned}&2f\left(\frac{c}{2}+a\right)f\left(\frac{c}{2}-a\right)\\&=f\left[\left(\frac{c}{2}+a\right)+\left(\frac{c}{2}-a\right)\right]+f\left[\left(\frac{c}{2}+a\right)-\left(\frac{c}{2}-a\right)\right]\\&=f(c)+f(2a)=-1+f(2a)\\&=-1+2f^2(a)-f(0)=2[f^2(a)-1]>0.\end{aligned}$$

所以有

$$f\left(\frac{c}{2}+a\right)f\left(\frac{c}{2}-a\right)>0. \tag{117}$$

但是, 另一方面,

$$f\left(\frac{c}{2}-a\right)=f\left[c-\left(\frac{c}{2}+a\right)\right]=-f\left(\frac{c}{2}+a\right).$$

所以又有

$$f\left(\frac{c}{2}+a\right)f\left(\frac{c}{2}-a\right)=-f^2\left(\frac{c}{2}+a\right)\leqslant 0. \tag{118}$$

(117), (118)两式互相矛盾. 这就证明了性质 8.

到现在为止，我们证明了满足函数方程(15)(和条件1～3)的函数$f(x)$，它具有与余弦函数$\cos x$相同的许多性质，并且显然$\cos x$也满足函数方程(15)．但是，我们还不能说这里的$f(x)$就是$\cos x$．除非在证明了函数方程(15)的解的唯一性(并且取条件2中的常数$c=\pi$)，才能断言$f(x)$和$\cos x$恒等：$f(x)\equiv\cos x$，亦即对于任何实数x，都有$f(x)=\cos x$．

下面，我们来叙述并证明函数方程(15)的解的唯一性定理．

唯一性定理 对于给定的正的常数c，不存在满足函数方程(15)和条件1～3的两个不同的函数．

证明 设有两个函数$f_1(x)$和$f_2(x)$都满足函数方程(15)和条件1～3．我们来证明实际上二者恒等：

$$f_1(x)\equiv f_2(x).$$

分三步证明：

1．首先证明，当自变量x取数列

$$\frac{c}{2},\ \frac{c}{2^2},\ \frac{c}{2^3},\ \cdots,\ \frac{c}{2^n},\ \cdots$$

的值，函数$f_1(x)$和$f_2(x)$的值相等，即

$$f_1\left(\frac{c}{2^i}\right)=f_2\left(\frac{c}{2^i}\right).\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

事实上，由条件2有

$$f_1\left(\frac{c}{2}\right)=f_2\left(\frac{c}{2}\right)=0.$$

从条件1～3得知

$$f_1(x)>0,\ f_2(x)>0.$$

依次应用性质6，就得

$$f_1\left(\frac{c}{2^2}\right)=f_2\left(\frac{c}{2^2}\right)=\sqrt{\frac{1+0}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f_1\left(\frac{c}{2^3}\right)=f_2\left(\frac{c}{2^3}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

一般地有(用数学归纳法容易证明)

$$f_1\left(\frac{c}{2^n}\right)=f_2\left(\frac{c}{2^n}\right)=\frac{S_{n-1}}{2},$$

这里 $S_{n-1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$. ($n-1$个根号)

2. 其次证明，当自变量 $x=\frac{mc}{2^n}$ 时(n 是任何自然数，m 是任何整数)，两个函数的值相等：

$$f_1\left(\frac{mc}{2^n}\right)=f_2\left(\frac{mc}{2^n}\right). \tag{119}$$

设 m 为正整数. 当 $m=1$ 时，已经证明

$$f_1\left(\frac{c}{2^n}\right)=f_2\left(\frac{c}{2^n}\right)=\frac{S_{n-1}}{2}.$$

当 $m=2$ 时，

$$f_1\left(\frac{2c}{2^n}\right)=f_1\left(\frac{c}{2^{n-1}}\right)=\frac{S_{n-2}}{2}.$$

$$f_2\left(\frac{2c}{2^n}\right)=f_1\left(\frac{c}{2^{n-1}}\right)=\frac{S_{n-2}}{2}.$$

$$\therefore\ f_1\left(\frac{2c}{2^n}\right)=f_2\left(\frac{2c}{2^n}\right).$$

设当 $m=k$, $k+1$ 时(119)成立. 那末有

$$\begin{aligned}f_1\left[\frac{(k+2)c}{2^n}\right]&=f_1\left[\frac{(k+1)c}{2^n}+\frac{c}{2^n}\right]\\&=2f_1\left[\frac{(k+1)c}{2^n}\right]f_1\left(\frac{c}{2^n}\right)-f_1\left(\frac{kc}{2^n}\right)\\&=2f_2\left[\frac{(k+1)c}{2^n}\right]f_2\left(\frac{c}{2^n}\right)-f_2\left(\frac{kc}{2^n}\right)\\&=f_2\left[\frac{(k+1)c}{2^n}+\frac{c}{2^n}\right]=f_2\left[\frac{(k+2)c}{2^n}\right].\end{aligned}$$

于是，我们用数学归纳法证明了(119)当m为正整数的情形．

当$m=0$时，

$$f_1(0)=f_2(0)=1.$$

当$m<0$为负整数时，由于函数$f_1(x)$，$f_2(x)$的偶性，有

$$f_1\left(\frac{mc}{2^n}\right)=f_1\left(\frac{-mc}{2^n}\right)=f_2\left(\frac{-mc}{2^n}\right)=f_2\left(\frac{mc}{2^n}\right).$$

这样，我们就完全地证明了(119)．

3．最后证明，当自变量取任何实数x时，函数

$$f_1(x)=f_2(x).$$

把数$\frac{x}{c}$化成二进制小数，即表示为

$$\frac{x}{c}=p_0+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\cdots+\frac{p_n}{2^n}+\cdots,$$

其中，p_0是整数，而$p_i=0$或1．($i=1, 2, 3, \cdots$)

如果上述二进制小数是有限的，例如假定$p_n\neq 0$，而$p_{n+1}=p_{n+2}=\cdots=0$．那末

$$\frac{x}{c}=p_0+\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\cdots+\frac{p_n}{2^n}.$$

于是

$$x=p_0c+\frac{p_1c}{2}+\frac{p_2c}{2^2}+\cdots+\frac{p_nc}{2^n}$$

$$=\frac{(2^np_0+2^{n-1}p_1+2^{n-2}p_2+\cdots+p_n)c}{2^n}=\frac{mc}{2^n}.$$

这里，整数

$$m=2^np_0+2^{n-1}p_1+2^{n-2}p_2+\cdots+p_n.$$

可见x具有$\frac{mc}{2^n}$的形式．前已证明，在这种情形下

$$f_1\left(\frac{mc}{2^n}\right)=f_2\left(\frac{mc}{2^n}\right).$$

我们假定二进制小数是无限的．令其不足近似值为

$$x_n^- = p_0c + \frac{p_1c}{2} + \frac{p_2c}{2^2} + \cdots + \frac{p_nc}{2^n} = \frac{mc}{2^n}.$$

当 $x\to\infty$ 时，$x_n^-\to x$．根据函数 $f(x)$ 的连续性，有

$$\lim_{x_n^-\to x} f_1(x_n^-) = f_1(x),$$

$$\lim_{x_n^-\to x} f_2(x_n^-) = f_2(x).$$

但是，我们已经证明

$$f_1(x_n^-) = f_2(x_n^-),$$

$$\therefore\quad f_1(x) = f_2(x).$$

唯一性定理至此已完全证明．如果取 $c=\pi$，那末 $f(x)=\cos x$．

余弦函数由前述函数方程(15)和条件1～3定义之后，我们可以把正弦函数和正切函数分别定义为

$$g(x) = f\left(\frac{c}{2}-x\right),\ h(x) = g(x)/f(x).$$

由此出发可以推得函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 间一系列关系式．例如：

1．$g^2(x)+f^2(x)=1$．(即三角函数中的 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$)

证明　$g^2(x)+f^2(x) = f^2\left(\frac{c}{2}-x\right)+f^2(x)$.

由 $f(x)$ 的性质5，得

$$f^2\left(\frac{c}{2}-x\right)+f^2(x) = \frac{1+f(c-2x)}{2}+\frac{1+f(2x)}{2}$$

$$= 1+\frac{1}{2}[f(c-2x)+f(2x)].$$

但由性质3和2，

$$f(c-2x) = -f(-2x) = -f(2x).$$

$$\therefore\quad g^2(x)+f^2(x)=1.$$

2．$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$．［即 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$］

证明 $f(x)f(y)-g(x)g(y)$

$$=f(x)f(y)-f\left(\frac{c}{2}-x\right)f\left(\frac{c}{2}-y\right)$$

$$=\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}-\frac{f(c-x-y)+f(-x+y)}{2}$$

$$=\frac{f(x+y)}{2}-\frac{f[c-(x+y)]}{2}+\frac{f(x-y)}{2}-\frac{f(x-y)}{2}$$

$$=f(x+y).$$

3．$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$，［即 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$］

证明 $g(x)f(y)+f(x)g(y)$

$$=f\left(\frac{c}{2}-x\right)f(y)+f(x)f\left(\frac{c}{2}-y\right)$$

$$=\frac{f\left(\frac{c}{2}-x+y\right)+f\left(\frac{c}{2}-x-y\right)}{2}$$

$$+\frac{f\left(x+\frac{c}{2}-y\right)+f\left(x-\frac{c}{2}+y\right)}{2}$$

$$=f\left(\frac{c}{2}-x-y\right)+\frac{f\left(\frac{c}{2}-x+y\right)+f\left(\frac{c}{2}+x-y\right)}{2}$$

$$=f\left(\frac{c}{2}-x-y\right)+\frac{f\left[\frac{c}{2}-(x-y)\right]+f\left[\frac{c}{2}+(x-y)\right]}{2}$$

$$=f\left[\frac{c}{2}-(x+y)\right]+\frac{2f\left(\frac{c}{2}\right)f(x-y)}{2}$$

$$=f\left[\frac{c}{2}-(x+y)\right]=g(x+y).$$

用函数方程(15)定义余弦函数，然后由余弦函数定义正弦和正切函数，这个方法并不是用函数方程定义三角函数的唯一方案．例如，可以先把正切函数定义为函数方程

$$h(x+y)=\frac{h(x)+h(y)}{1-h(x)h(y)}$$

的解，然后把正弦、余弦函数分别定义为

$$f(x)=\frac{2h\left(\frac{x}{2}\right)}{1+h^2\left(\frac{x}{2}\right)},\quad g(x)=\frac{1-h^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+h^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

甚至我们还可以通过一个含有两个未知函数的函数方程来同时定义正弦和余弦函数．例如可以用

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$$

或者

$$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$$

之类的函数方程的解 $g(x)$、$f(x)$，来分别定义正弦和余弦函数．当然，在这样做的时候，正象我们在前面曾经看到的那样，还应当给出一些补充条件．因为如果没有这些条件，就不能保证函数方程的解的唯一性．

练习 16 余弦函数 $f(x)$ 和正弦函数 $g(x)$ 可以定义为函数方程

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$$

的解，且满足条件：

(1) $f(x)$, $g(x)$ 在整个实轴上连续；

(2) 对于某正数 c，当 $0<x<c$ 时，

$$f(x)>0,\ g(x)>0;$$

(3) $f(0)=g(c)=1$.

根据上述函数方程和条件，证明：

(1) $f(c)=g(0)=0$;

(2) $g^2(x)+f^2(x)=1$;

(3) $f(c-x)=g(x)$，而 $g(c-x)=f(x)$;

(4) $g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$.

附录　练习解答

1. 解　$\because\ 2f(x^2)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=x$,　　(1)

以 $\frac{1}{x}$ 代换 x，得

$$2f\left(\frac{1}{x^2}\right)+f(x^2)=\frac{1}{x}.\qquad(2)$$

(1)×2－(2)，得

$$3f(x^2)=2x-\frac{1}{x}.$$

$$\therefore\quad f(x^2)=\frac{2x^2-1}{3x}.$$

以 x 代换 x^2，得

$$f(x)=\frac{2x-1}{3\sqrt{x}}.$$

2. 解　$\because\ af(x^3)+bf(-x^3)=cx$,　　(1)

以 $-x$ 代换 x，得

$$af(-x^3)+bf(x^3)=-cx.\qquad(2)$$

(1)×a－(2)×b，得

$$a^2f(x^3)-b^2f(x^3)=acx+bcx,$$

即

$$f(x^3)=\frac{(a+b)cx}{a^2-b^2}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{(a+b)c\sqrt[3]{x}}{a^2-b^2}.$$

3. 解　$\because\ f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$,　　(1)

以 $\frac{x-1}{x}$ 代换 x，则

$$\frac{x-1}{x}\text{化为}\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}.$$

原方程化为

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x}. \tag{2}$$

再以 $\frac{-1}{x-1}$ 代换(1)中的 x，又得

$$f\left(\frac{-1}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x-2}{x-1}. \tag{3}$$

(1)＋(3)－(2)，得

$$2f(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x},$$

即

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}.$$

4．解 依次令 $n=1, 2, 3, \cdots$，得

$$f(2)-f(1)=10\times1+9,$$
$$f(3)-f(2)=10\times2+9,$$
$$f(4)-f(3)=10\times3+9,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(n+1)-f(n)=10n+9.$$

相加在一起，得

$$f(n+1)-f(1)=10\times1+10\times2+10\times3+\cdots+10n+9n,$$

但 $f(1)=10$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(n+1)&=10\cdot(1+2+3+\cdots+n)+9n+10\\&=5n^2+14n+10\\&=5(n+1)^2+4(n+1)+1.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(n)=5n^2+4n+1.$$

5．解 若 n 为偶数：$n=2k$，则原方程化为

$$a^2f(2k+2)=b^2f(2k).$$

依次令 $k=1, 2, 3, \cdots$，得

$$a^2f(4)=b^2f(2),$$
$$a^2f(6)=b^2f(4),$$
$$a^2f(8)=b^2f(6),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^2f(2k+2)=b^2f(2k).$$

左右两边分别相乘，约去公因式后得：

$$a^{2k}f(2k+2)=b^{2k}f(2).$$

$$\therefore\quad f(2k+2)=\frac{b^{2k}}{a^{2k}}f(2)=\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}.$$

$$\therefore\quad f(n)=\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}. \tag{1}$$

若 n 为奇数：$n=2k+1$，则原方程化为

$$a^2f(2k+3)=b^2f(2k+1).$$

依次令 $k=0,1,2,3,\cdots$，得

$$\begin{aligned}&a^2f(3)=b^2f(1),\\&a^2f(5)=b^2f(3),\\&a^2f(7)=b^2f(5),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a^2f(2k+3)=b^2f(2k+1).\end{aligned}$$

将后 k 个等式两端分别相乘，并约去公因式后得

$$a^{2k}f(2k+3)=b^{2k}f(3).$$

但 $f(3)=\frac{b^2}{a^2}f(1)=0$.

$$\therefore\quad f(2k+3)=0.$$

或

$$f(n)=0. \tag{2}$$

综合(1)，(2)，得

$$f(n)=\frac{[1+(-1)^n]}{2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}.$$

6. 解 (1) 设 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有 $f(n)$ 条对角线。增加一条边成为 $n+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$。原多边形的一条边 A_1A_n 变成对角线，且由顶点 A_{n+1} 可引出 $(n-2)$ 条对角线。所以有

$$f(n+1)=f(n)+(n-1).$$

依次令 $n=3,4,5,\cdots$，得

$$\begin{aligned}&f(4)=f(3)+3-1,\\&f(5)=f(4)+4-1,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&f(n+1)=f(n)+n-1.\end{aligned}$$

相加，得

$$f(n+1)=f(3)+(3+4+\cdots+n)-(n-2).$$

考虑到 $f(3)=0$，即得

$$f(n+1)=\frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

即

$$f(n)=\frac{n(n-3)}{2}.$$

就是说，凸 n 边形共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

(2) 设凸 n 边形的内角和为 $f(n)$ 度。仿(1)可以求得 $f(n)=(n-2)\times 180°$.

7. 解 (1) 设 n 个两两相交的圆 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 把平面分成 $f_1(n)$ 部分。作第 $n+1$ 个圆 c_{n+1} 与所有的圆两两相交，共有 n 对点。这 n 对点把 c_{n+1} 分成 $2n$ 部分，所以圆 c_{n+1} 又从被原来的 n 个圆所分的平面数 $f_1(n)$ 中截分了 $2n$ 部分，即

$$f_1(n+1)=f_1(n)+2n.$$

解这个函数方程，得

$$f_1(n)=n^2-n+2.$$

(2) 设 n 个两两相交的球分空间为 $f_2(n)$ 部分。则第 $n+1$ 个球的球面被原来的 n 个球分成 n^2-n+2 部分[见(1)]。所以有

$$f_2(n+1)=f_2(n)+n^2-n+2.$$

解这个函数方程，得

$$f_2(n)=\frac{n(n^2-3n+8)}{3}.$$

8. 解 函数方程对应的特征方程是

$$q^2=q+2.$$

解这个方程，得

$$q_1=2,\ q_2=-1.$$

由所给初值条件，解关于 A, B 的方程组

$$\begin{cases}A+B=f(1)=0,\\ Aq_1+Bq_2=2A-B=f(2)=1,\end{cases}$$

得

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3}.$$

故所求的函数是

$$\begin{aligned}f(n)&=Aq_1^{n-1}+Bq_2^{n-1}\\&=\frac{1}{3}\times 2^{n-1}-\frac{1}{3}\times(-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

9. 解 函数方程对应的特征方程是

$$a^2q^2=b^2.$$

$$\therefore\quad q_1=\frac{b}{a},\quad q_2=-\frac{b}{a}.$$

$$\begin{cases} A+B=f(1)=0, \\ Aq_1+Bq_2=\dfrac{b}{a}A-\dfrac{b}{a}B=f(2)=1, \end{cases}$$

$$\therefore \quad A=\frac{a}{2b}, \quad B=-\frac{a}{2b}.$$

所求的函数方程是

$$\begin{aligned} f(n) &= Aq_1^{n-1}+Bq_2^{n-1} \\ &= \frac{a}{2b}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}-\frac{a}{2b}\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ &= \frac{[1+(-1)^n]}{2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

这个结果和原来的完全一致，只是解法更简练了。

10. **证**　函数方程对应的特征方程是

$$q^2=3q-2,$$

$$\therefore \quad q_1=1,\ q_2=2.$$

$$\begin{cases} A+B=2, \\ A+2B=3. \end{cases}$$

$$\therefore \quad A=1,\ B=1.$$

$$f(n)=1^n+2^n=2^n+1.$$

11. **解**　因有

$$a_k=3a_{k-1}+2^{k-1},$$

$$\therefore \quad a_{k+1}=3a_k+2^k,$$

$$2a_k=6a_{k-1}+2^k.$$

上列两式相减，得

$$a_{k+1}-2a_k=3a_k-6a_{k-1}.$$

即

$$a_{k+1}-5a_k+6a_{k-1}=0.$$

解特征方程

$$q^2-5q+6=0,$$

得

$$q_1=2,\ q_2=3.$$

此外，显然有

$$a_1=1,\ a_2=3\cdot1+2=5.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} A+B=1, \\ 2A+3B=5. \end{cases}$$

$$\therefore \quad A=-2,\ B=3,$$

数列的通项

$$a_n=-2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 3^{n-1}=3^n-2^n.$$

12. 解 $f(n)$ 显然满足函数方程：

$$f(n+1)=f(n)+(n+1)^3.$$

把上边的递推形式化为递归形式：

$$f(n+5)-5f(n+4)+10f(n+3)-10f(n+2)+5f(n+1)-f(n)=0.$$

对应的特征方程是

$$q^5-5q^4+10q^3-10q^2+5q-1=0,$$

即

$$(q-1)^5=0.$$

它有5重根 $q=\alpha=1$.

根据方程组(74)，得

$$\begin{cases} B_0=f(1)=1^3=1, \\ B_0+B_1+B_2+B_3+B_4=f(2)=1^3+2^3=9, \\ B_0+2B_1+4B_2+8B_3+16B_4=f(3)=1^3+2^3+3^3=36, \\ B_0+3B_1+9B_2+27B_3+81B_4=f(4)=1^3+2^3+3^3+4^3=100, \\ B_0+4B_1+16B_2+64B_3+256B_4=f(5)=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$B_0=1,\ B_1=3,\ B_2=\frac{13}{4},\ B_3=\frac{3}{2},\ B_4=\frac{1}{4}.$$

把 $\alpha=1$, $B_0=1$, $B_1=3$, $B_2=\frac{13}{4}$, $B_3=\frac{3}{2}$, $B_4=\frac{1}{4}$ 代入(73)，求出

$$f(n)=\left[1+3(n-1)+\frac{13}{4}(n-1)^2+\frac{3}{2}(n-1)^3+\frac{1}{4}(n-1)^4\right]\cdot 1$$

$$=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}.$$

即

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

13. 解 由原方程得

$$\frac{1}{f(x+y)}=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)f(y)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}.$$

设 $\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}$. 就有

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y).$$

这是柯西方程，

$$\therefore\ \varphi(x)=cx.$$

$$f(x)=\frac{1}{cx}=\frac{a}{x}.$$

这里，$a=\frac{1}{c}$. 所给函数方程的解是反比例函数。

14. 解 因函数 $f(x)$ 的定义域是正实数。故可设 $u=\log_b x$, $v=\log_b y$，或 $x=b^u$, $y=b^v$. 代入原函数方程得

$$f(b^{u+v})=f(b^u)+f(b^v).$$

令

$$\phi(t)=f(b^t),$$

就有

$$\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v).$$

这是柯西方程。

$$\therefore \quad \varphi(u)=cu.$$

所以有

$$f(x)=f(b^u)=\varphi(u)=cu=c\log_b x.$$

设 $a=b^{\frac{1}{c}}$, 则

$$c\log_b x=\log_b x^c=\log_{b^{\frac{1}{c}}} x=\log_a x.$$

$$\therefore \quad f(x)=\log_a x.$$

所给函数方程的解是对数函数.

15. 解 设 $u=\log_b x$, $v=\log_b y$，或 $x=b^u$, $y=b^v$. 代入原函数方程，得

$$f(b^{u+v})=f(b^u)f(b^v).$$

令

$$\varphi(t)=f(b^t).$$

就有

$$\varphi(u+v)=\varphi(u)\varphi(v).$$

$$\therefore \quad \varphi(u)=a^u.$$

$$f(x)=f(b^u)=\varphi(u)=a^u=a^{\log_b x}.$$

$$\because \quad a^{\log_b x}=x^{\log_b a},$$

令 $c=\log_b a$, 就有

$$f(x)=x^c.$$

所给函数方程的解是幂函数。

16. 解

(1) 在所给的函数方程中，令 $x=y=0$, 得

$$f(0)=f^2(0)+g^2(0).$$

但 $f(0)=1$[条件(3)]，所以有 $1=1+g^2(0)$. 从而 $g(0)=0$.

又如令$x=y=c$，得

$$f(0)=f^2(c)+g^2(c).$$

所以有$1=f^2(c)+1$，从而$f(c)=0$。

(2) 在函数方程中令$x=y$，再用条件(3)，就可推出$g^2(x)+f^2(x)=1$。

(3) 在函数方程中，用c代换x，用x代换y，得

$$f(c-x)=f(c)f(x)+g(c)g(x)=0\cdot f(x)+1\cdot g(x)=g(x).$$

在上式中，用$c-y$代换x，得

$$f(y)=g(c-y),$$

即

$$g(c-x)=f(x).$$

(4) 用(3)中证明的结果和所给的函数方程，得

$$\begin{aligned}g(x+y)&=f[c-(x+y)]=f[(c-x)-y]\\&=f(c-x)f(y)+g(c-x)g(y)\\&=g(x)f(y)+f(x)g(y).\end{aligned}$$

参考资料

1. С.И.诺渥塞洛夫，三角学专门教程，下册，高等教育出版社，1956年版，450～463，474～480页。

2. Ю.М.果良金，论函数方程，数学通报，1959，12。

3. 何平，柯西函数方程及其应用，数学通报，1966，3.

4. Ю.М.格依都卡，关于解析的和几何的三角函数的定义问题，中学数学，1957，3.